2.2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών:

Αν $\omega + \varphi = 180^o$ τότε οι γωνίες ω και φ έχουν το **ίδιο ημίτονο** και **αντίθετους** τους **άλλους** τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Με τύπους $\eta\mu\omega = \eta\mu\varphi$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi\varphi$

2 .

Άμεσο συμπέρασμα : Έστω $0^o \le \omega \le 180^o$

Αν $\eta\mu\omega = \eta\mu\varphi$ τότε $\omega = \varphi$ ή $\omega = 180^o - \varphi$

Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu\varphi$ τότε $\omega = \varphi$

Αν $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\varphi$ τότε $\omega = \varphi$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Απαλλαγή από το πρόσημο (–)

- Στο συν, με τον τύπο $-\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu(180^o - \omega)$
- Στην εφ, με τον τύπο $-\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(180^o - \omega)$

2.

Εύρεση τριγωνομετρικού αριθμού αμβλείας γωνίας

Βρίσκουμε τον αντίστοιχο τριγωνομετρικό αριθμό της παραπληρωματικής και εφαρμόζουμε το (1) της θεωρίας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) $ημ140^o = –ημ40^o$ Λ
β) $εφ20^o = –εφ160^o$ Σ
γ) $συν\,145^o = συν\,35^o$ Λ
δ) $ημ18^o = ημ162^o$ Σ
ε) Αν $ημx = ημ17^o$ τότε $x = 17^o$ Λ
στ) Αν $εφx = –εφ23^o$ τότε $x = –23^o$ Λ
ζ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ημ(\hat{A} + \hat{B}) = 1$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο Σ
η) $συνx = κ$ τότε και $συν(180^o – x) = κ$ Λ
θ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $συν(\hat{A} + \hat{B}) = 0$ τότε το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο Λ
ι) Αν $90^o < x < 180^o$ και $συνx = –συν\,20$ τότε $x = 160^o$ Σ

Προτεινόμενη λύση

α) $ημ140^o = ημ40^o$ άρα η πρόταση είναι λάθος
β) αφού $160^o + 20^o = 180^o$ η πρόταση είναι σωστή
γ) $συν\,145^o = –συν\,35^o$ άρα η πρόταση είναι λάθος
δ) αφού $18^o + 162^o = 180^o$ η πρόταση είναι σωστή
ε) αν $ημx = ημ17$ τότε $x = 17^o$ ή $x = 163^o$ άρα η πρόταση είναι λάθος
στ) $εφx = –εφ23^o = εφ(180^o – 23^o) = εφ157^o$ άρα $x = 157$. Πρόταση λάθος
ζ) $ημ(\hat{A} + \hat{B}) = 1 = ημ90^o$ οπότε $\hat{A} + \hat{B} = 90^o$ επομένως $\hat{Γ} = 90^o$
Άρα η πρόταση είναι σωστή
η) $συν(180^o – x) = –συνx = –κ$ επομένως η πρόταση είναι λάθος
θ) $συν(\hat{A} + \hat{B}) = συν90^o$ άρα $\hat{A} + \hat{B} = 90^o$ οπότε $\hat{Γ} = 90^o$
Επομένως η πρόταση είναι λάθος
ι) Αν $συνx = –συν\,20 = συν\,160^o$ τότε $x = 160^o$ άρα η πρόταση είναι σωστή

2.

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων
i) $A = ημ^2\,150^o + συν^2 120^o + 2εφ135^o$
ii) $B = ημ120^o – συν^2 150^o + εφ^2 120^o$

Θεωρία 1

Προτεινόμενη λύση

i)

$$A = ημ^2\,150^o + συν^2 120^o + 2εφ135^o =$$
$$= ημ^2\,30^o + (–συν60^o)^2 + 2(–εφ45^o) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2(–1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} – 2 = -\frac{3}{2}$$

ii)

$$B = ημ120^o – συν^2 150^o + εφ^2 120^o =$$
$$= ημ60^o – (–συν30^o)^2 + (–εφ60^o)^2 =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} + 3 = \frac{9+2\sqrt{3}}{4}$$

3.

Να αποδείξετε ότι

i) $ημ(150^o + 2x) = ημ(30^o - 2x)$

ii) $συν(45 + y) = -συν(135^o - y)$

iii) $εφ(100 – θ) = -εφ(80 + θ)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$(150^o + 2x) + (30^o - 2x) = 150^o + 2x + 30^o - 2x = 180^o$

Άρα $ημ(150^o + 2x) = ημ(30^o - 2x)$

ii)

$(45 + y) + (135^o - y) = 45 + y + 135^o - y = 180^o$

Άρα $συν(45 + y) = -συν(135^o - y)$

iii)

$(100 - θ) + (80 + θ) = 100 - θ) + 80 + θ = 180^o$

Άρα $εφ(100 - θ) = -εφ(80 + θ)$

4.

Να βρείτε την γωνία x όταν

i) $2συνx = \sqrt{3}$ **ii)** $3ημx = ημx + 1$ **iii)** $εφx = \sqrt{3} + 4εφx$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 2

i)

$2συνx = \sqrt{3}$ άρα $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ οπότε $x = 30^o$

ii)

$3ημx = ημx + 1$ οπότε $2ημx = 1$ άρα $ημx = \frac{1}{2}$ επομένως $x = 30^o$ ή $x = 150^o$

iii)

$εφx = \sqrt{3} + 4εφx$ άρα $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -εφ30^o$ άρα $εφx = εφ150^o$

Επομένως $x = 150^o$

5 .

Να αποδείξετε ότι

i) $2ημ140^o + συν 100^o - 2ημ40^o + συν80^o + εφ20^o + εφ160^o = 0$

ii) $ημ(10^o + θ) + εφ(20^o - x) + συν110^o - ημ(170^o - θ) + εφ(160^o + x) + συν 70^o = 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$2ημ140^o + συν 100^o - 2ημ40^o + συν80^o + εφ20^o + εφ160^o =$$
$$= 2ημ40^o + (-συν80^o) - 2ημ40^o + συν80^o + εφ20^o + (-εφ20^o) =$$
$$= 2ημ40^o - συν80^o - 2ημ40^o + συν80^o + εφ20^o - εφ20^o = 0$$

ii)
Είναι $(10^o + θ) + (170^o - θ) = 10^o + θ + 170^o - θ = 180^o$
Άρα $ημ(170^o - θ) = ημ(10^o + θ)$

Είναι $(20^o - x) + (160^o + x) = 20^o - x + 160^o + x = 180^o$
Άρα $εφ(160^o + x) = -εφ(20^o - x)$

Είναι $110^o + 70^o = 180^o$
Άρα $συν110^o = -συν70^o$

Οπότε το άθροισμα του $1^{ου}$ μέλους ισούται με μηδέν

6 .

Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων

i) $ημ135^o συν150^o εφ120^o$ **ii)** $συν135^o εφ150^o ημ120^o$

iii) $\dfrac{ημ150^o συν120^o εφ135^o}{ημ30^o συν60^o εφ45^o}$ **iv)** $\dfrac{ημ120^o + συν135^o - εφ135^o}{2ημ150^o + συν120^o}$

Προτεινόμενη λύση

i)
$$ημ135^o συν150^o εφ120^o = ημ45^o (-συν30^o)(-εφ60^o) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

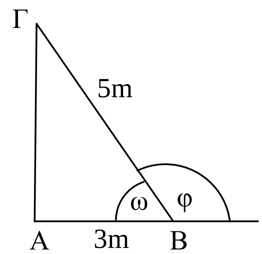
ii)
$$συν135^o εφ150^o ημ120^o = (-συν45^o)(-εφ30^o) ημ60^o =$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

iii)
$$\frac{ημ150^o συν120^o εφ135^o}{ημ30^o συν60^o εφ45^o} = \frac{ημ30^o(-συν60^o)(-εφ45^o)}{ημ30^o συν60^o εφ45^o} =$$
$$= \frac{ημ30^o συν60^o εφ45^o}{ημ30^o συν60^o εφ45^o} = 1$$

iv)
$$\frac{ημ120^o + συν135^o - εφ135^o}{2ημ150^o + συν120^o} = \frac{ημ60^o + (-συν45^o) - (-εφ45^o)}{2ημ30^o + (-συν60^o)} =$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2$$

7 .

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ.



Προτεινόμενη λύση

Πυθαγόρειο στο ΑΒΓ $\quad ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 =$

$= 25 - 9 = 16$

άρα $ΑΓ = \sqrt{16} = 4$

$ημω = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{4}{5}$, $συνω = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{3}{5}$, $εφω = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{4}{3}$

Επειδή $ω + φ = 180^o$, είναι $ημφ = ημω = \frac{4}{5}$

$συνφ = -\ συνω = -\frac{3}{5}$

$εφφ = -\ εφω = -\frac{4}{3}$

8.

Με την βοήθεια τριγωνομετρικών πινάκων να υπολογιστούν

α) $ημ127^o$ **β)** $συν154^o$ **γ)** $εφ\ 132^o$

Σχόλιο 2

Προτεινόμενη λύση

α)

Η παραπληρωματική γωνίας της γωνίας των 127^o είναι η 53^o

Άρα $ημ127^o = ημ53^o = 0{,}7986$

β)

Ομοίως $συν154^o = -\ συν\ 26^o = -\ 0{,}8988$

γ)

Ομοίως $εφ132^o = -\ εφ48^o = -\ 1{,}1106$

9.

Αν $0^o \le x \le 180^o$ να βρείτε την γωνία x όταν

α) $συνx\ (\ 2συνx + 1) = 0$

β) $(εφx + \sqrt{3}\,)\ (εφx + 1) = 0$

γ) $(ημx + 2)\ (2ημx - 1) = 0$

Προτεινόμενη λύση

α)

$συνx\ (2συνx + 1) = 0$ άρα $συνx = 0$ ή $2συνx + 1 = 0$

- Όταν $συνx = 0$ τότε $συνx = συν90^o$ τότε

  $x = 90^o$

- Όταν $2συνx + 1 = 0$ τότε $συνx = -\frac{1}{2}$ οπότε

  $συνx = -συν60^o$

  $συνx = συν120^o$

  $x = 120^o$

β)

$(\varepsilon\varphi x + \sqrt{3})\,(\varepsilon\varphi x + 1) = 0$ άρα $\varepsilon\varphi x + \sqrt{3} = 0$ ή $\varepsilon\varphi x + 1 = 0$

- Όταν $\varepsilon\varphi x + \sqrt{3} = 0$ τότε $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$

  $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi 60^o$

  $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 120^o$

  $x = 120^o$

- Όταν $\varepsilon\varphi x + 1 = 0$ τότε $\varepsilon\varphi x = -1$

  $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi 45^o$

  $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 135^o$

  $x = 135^o$

γ)

$(\eta\mu x + 2)\,(2\eta\mu x - 1) = 0$ άρα $\eta\mu x + 2 = 0$ ή $2\eta\mu x - 1 = 0$

- Όταν $\eta\mu x + 2 = 0$ τότε $\eta\mu x = -2$ πράγμα αδύνατο
- Όταν αν $2\eta\mu x - 1 = 0$ τότε $\eta\mu x = \dfrac{1}{2}$

  $x = 30^o$ ή $x = 150^o$

10.

Αν $0^o \le x \le 180^o$ να βρείτε την γωνία x, όταν

α) $4\eta\mu^2 x = 3$

β) $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$

Προτεινόμενη λύση

α)

$4\eta\mu^2 x = 3$ άρα $\eta\mu^2 x = \dfrac{3}{4}$ επομένως $\eta\mu x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\eta\mu x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- Όταν $\eta\mu x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ τότε $x = 60^o$ ή $x = 120^o$
- Όταν $\eta\mu x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ είναι αδύνατον αφού $0^o \le x \le 180^o$

β)

$2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$ άρα $\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{2}$ επομένως $\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Όταν $\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ τότε $x = 45^o$
- Όταν $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ τότε $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 45^o$

  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 135^o$

  $x = 135^o$